

УДК 621.762.4

Савелов Д. В.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВИБРАЦИОННОГО ФОРМОВАНИЯ ИЗДЕЛИЙ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОРОШКОВ

Возможности теоретического анализа и точность получаемых результатов в значительной степени будут зависеть от принятой расчетной модели порошковой смеси. Ранее в работах [1–4] были предложены реологические модели, которые хотя и использовались для решения аналогичных задач, однако дают представление о поведении материала под нагрузкой лишь в первом приближении. Более точное описание процесса дает реологическая модель среды, представленная в работе [5]. Однако применение этой модели делает невозможным использование метода решения, основанного на элементарных функциях.

В настоящей работе для теоретического определения закона движения и амплитуды колебаний вибрирующего пуансона, необходимой для уплотнения порошковой смеси, а также для изучения действия сил сопротивления со стороны порошковой смеси на вибрирующий пуансон при его вертикальных колебаниях применен метод решения в комплексных функциях, что позволило получить решения, вполне приемлемые для практического использования.

Целью работы является установление характера взаимодействия вибрирующего пуансона с порошковой смесью при его колебаниях в вертикальном направлении, определение его закона движения, конструктивных параметров и режимов вибрационного воздействия.

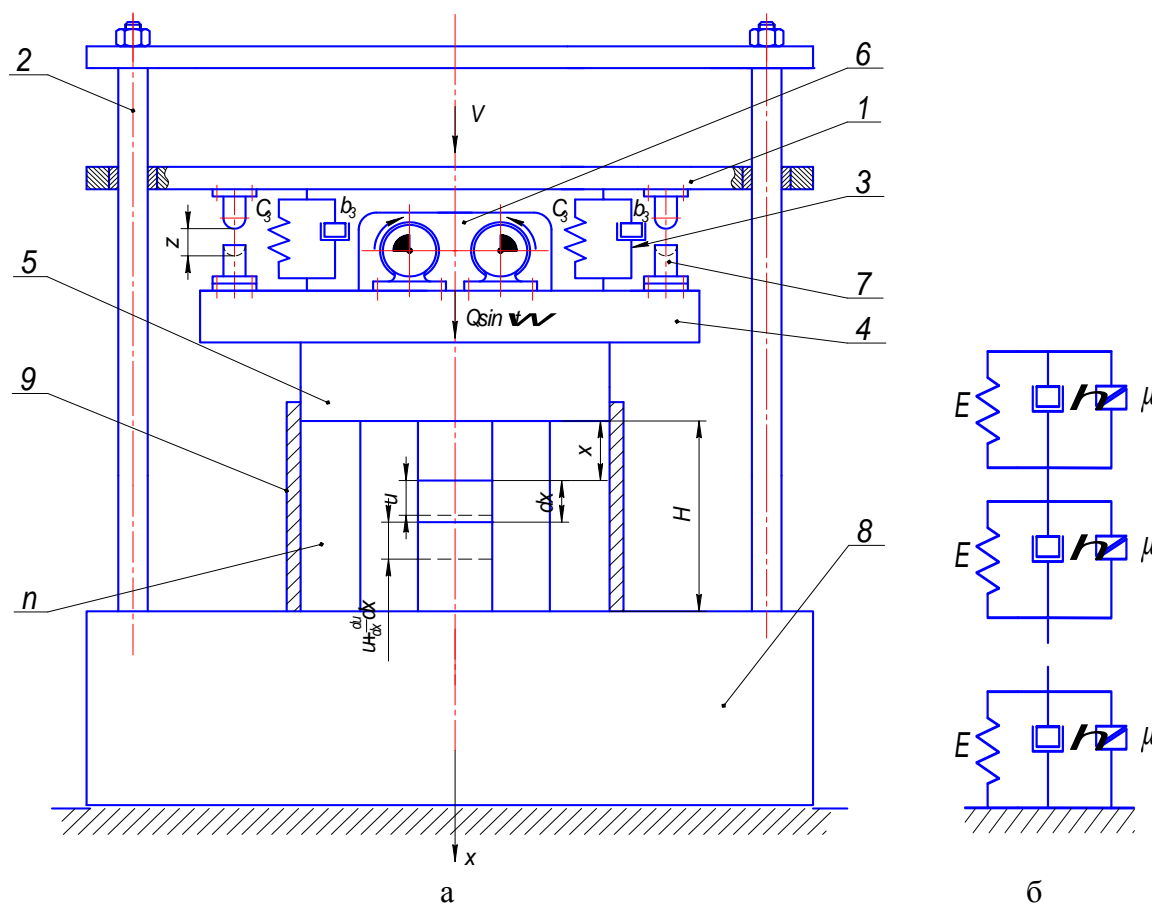


Рис. 1. Расчетная схема (а) и реологическая модель элементарного объема порошковой смеси из n элементов (б):

1 – реактивная плита; 2 – направляющая; 3 – упругий амортизатор; 4 – виброплита; 5 – вибрирующий пуансон; 6 – вибровозбудитель; 7 – ограничитель хода; 8 – станина; 9 – пресс-форма

Для решения поставленной задачи порошковая смесь, находящаяся в пресс-форме, представляется как сплошная непрерывная среда, на которую действует возмущение от вибрирующего пуансона. Для выявления закона распространения волн напряжений условно разобьем весь объем порошковой смеси, находящийся под вибрирующим пуансоном, на ряд элементарных объемов n (рис. 1, а). Упруговязкопластические свойства порошковой смеси в каждом элементарном объеме n представим реологической моделью (рис. 1, б).

Для изучения динамических процессов, происходящих при вибрационном уплотнении порошковой смеси рассмотрим динамическую систему «вибрирующий пуансон – порошковая смесь», в которой последняя представлена в виде системы с распределенными параметрами (рис. 1). Реактивная плита 1 вибропресса имеет возможность перемещаться по направляющим 2 со скоростью V_n . К реактивной плите 1 на упругих амортизаторах 3, установленных по дифференциальной схеме и имеющих коэффициенты жесткости c_3 и демпфирования b_3 подвешена виброплита 4 с вибрирующим пуансоном 5 массой m . На виброплите 4 размещены вибровозбудитель 6 направленных колебаний и жестко-упругие ограничители хода 7. На станине 8 вибропресса размещена съемная пресс-форма 9 с порошковой смесью [6]. Под действием возмущающей силы $Q \sin \omega t$ виброплита 4 с вибрирующим пуансоном 5 массой m совершает периодические движения в контакте с порошковой смесью и в отрыве от нее. Под действием внешней нагрузки в порошковой смеси возникает напряженное состояние.

Зависимость между напряжением и деформацией может быть описана уравнением [7]:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \mu \sigma_x, \quad (1)$$

где u и x – эйлерова и лагранжева координаты;

E – динамический модуль упругой деформации порошковой смеси;

η – коэффициент динамической вязкости, характеризующий внутреннее трение в порошковой смеси;

μ – коэффициент сухого трения, позволяющий моделировать упрочнение слоя порошковой смеси в процессе пластической деформации.

Поскольку изучаемая система является существенно нелинейной, ее движение рассматривалось поэтапно: удар и совместное движение вибрирующего пуансона и порошковой смеси за время t_1 ; отрыв от уплотняемой порошковой смеси и движение вибрирующего пуансона до следующего удара в воздухе за время t_2 . Условие периодичности движения имеет вид:

$$t_1 + t_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{\omega}, \quad (2)$$

где k – коэффициент, определяющий периодичность ударов.

Рассмотрим первый этап движения. Предположим, что плотность ρ в каждом элементарном объеме n порошковой смеси постоянна и ее изменения происходят скачкообразно от одного элементарного объема к другому. Движение среды будем рассматривать только в направлении элементарного объема n (координаты x) и во времени t , так как основным параметром при уплотнении является вертикальное деформирование порошковой смеси, а поперечными движениями частиц и влиянием стенок рабочего органа на движение элемента пренебрегаем из-за малости амплитуды. Пуансон 5 считаем недеформированным; станину 8 вибропресса, на которой происходит формование порошковой смеси, считаем абсолютно жесткой, так как модуль деформации станины 8 во много раз больше модуля деформации порошковой смеси.

Тогда для рассматриваемого одномерного случая дифференциальное уравнение движения уплотняемой порошковой среды в направлении координаты x за время t будет иметь вид [8]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3)$$

или с учетом зависимости (3):

$$E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + \mu \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$

В выражении (4) основными напряжениями считаются упругие, так как вязкие и сыпучие напряжения имеют значительно меньшую величину. В этом случае зависимость (4) примет вид:

$$E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + \mu E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Решение волнового уравнения колебаний (5) отыскивалось при следующих граничных:

$$-m \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} - b_3 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - c_3 u(0,t) + F \cdot E \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + F \cdot \eta \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x \partial t} + F \cdot \mu \cdot E \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -Q \sin(\omega t + \psi); \quad (6)$$

$$u(H,t) = 0 \quad (7)$$

и начальных условиях:

$$u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = V_n. \quad (8)$$

Здесь ω – угловая частота вынужденных колебаний; ψ – угол сдвига фаз между перемещением вибрирующего пуансона и возмущающей силой в момент удара пуансона об порошковую смесь; F – площадь рабочей поверхности вибрирующего пуансона.

Решение волнового уравнения колебаний (5) будем отыскивать по методу Фурье. Представим решение в виде суммы двух функций [9]:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t). \quad (9)$$

Функция $v(x,t)$ выбирается так, чтобы она удовлетворяла только граничным условиям (10) и (11) и описывает вынужденные колебания рассматриваемой динамической системы под действием возмущающей силы $Q \sin \alpha t$, а функция $w(x,t)$ – удовлетворяет начальным условиям (12) и описывает собственные колебания рассматриваемой динамической системы.

Представим функцию $v(x,t)$ в виде мнимой части комплексного числа:

$$v(x,t) = I(m) [v(x) \cdot e^{i(\omega \cdot t + \psi)}], \quad (10)$$

где амплитуда $v(x)$ считается комплексной величиной, т. е. в нее входит фаза $\psi(x)$. Знак при множителе $I(m)$ для удобства в дальнейшем будем отбрасывать. Подставив зависимость (10) в выражение (5) получим:

$$(E(1 + \mu) + i\eta\omega) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + \rho \cdot \omega^2 v(x) = 0. \quad (11)$$

Обозначим через \tilde{E} комплексный модуль упругой деформации:

$$\tilde{E} = (E(1 + \mu) + i\eta\omega). \quad (12)$$

При этом уравнение (11) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + \frac{\rho \cdot \omega^2}{\tilde{E}} v(x) = 0. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) будет иметь вид:

$$v(x) = D_1 \cdot e^{-i\tilde{k}x} + D_2 \cdot e^{i\tilde{k}x}, \quad (14)$$

где D_1 и D_2 – постоянные интегрирования (комплексные амплитуды), определяемые граничными условиями (6) и (7);

\tilde{k} – волновое число:

$$\tilde{k} = \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E(1 + \mu) + i\eta\omega}}. \quad (15)$$

Из выражения (15) следует, что волновое число \tilde{k} – комплексная величина, а значит, ее можно представить в виде [5]:

$$\tilde{k} = k - i\alpha = \frac{\omega}{a} - i\alpha, \quad (16)$$

где α – коэффициент затухания возмущения, характеризующий уменьшение амплитуды колебаний в зависимости от расстояния до источника возмущения;

a – фазовая скорость распространения возмущения в порошковой смеси.

На основании выражений (10), (14) и (16) функция $v(x, t)$ примет следующий вид:

$$v(x, t) = [D_1 e^{-(\alpha + ik)x} + D_2 e^{(\alpha + ik)x}] e^{i(\omega t + \psi)}. \quad (17)$$

Подставляя выражение (17) в граничные условия (6) и (7), определим постоянные интегрирования D_1 и D_2 в выражение (17) и, выделяя в полученном выражении мнимую часть, найдем значение функции $v(x, t)$ в виде:

$$v(x, t) = A_1 \cdot \frac{sh[(\alpha + ik)(H - x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \cdot \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad (18)$$

где

$$A_1 = \frac{Q}{\sqrt{c_1 + c_3 - (m + m_0)\omega^2 + (b_1 + b_3)^2 \omega^2}}; \quad (19)$$

$$c_1 = F \frac{\alpha E(1 + \mu) \cdot sh(2\alpha H) + (kE(1 + \mu) + \alpha\omega\eta) \cdot \sin(2kH)}{ch(2\alpha H) - \cos(2kH)}; \quad (20)$$

$$b_1 = F \frac{(kE(1 + \mu) + \alpha\omega\eta) \cdot sh(2\alpha H) - (\alpha E(1 + \mu) - k\omega\eta) \sin(2kH)}{\omega \cdot (ch(2\alpha H) - \cos(2kH))}; \quad (21)$$

$$m_n = F \frac{k\eta \cdot sh(2\alpha H)}{\omega \cdot (ch(2\alpha H) - \cos(2kH))}; \quad (22)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega(b_1 + b_3)}{c_1 + c_3 - (m + m_n)\omega^2}, \quad (23)$$

c_1 и b_1 – приведенные коэффициенты упругого и неупругого сопротивления порошковой смеси;

m_n – приведенная масса порошковой смеси;

φ – угол сдвига фаз.

Частота собственных колебаний динамической системы определится из зависимости:

$$p_c = \sqrt{\frac{c_1 + c_3}{m + m_n}}. \quad (24)$$

Определим функцию $w(x, t)$, которая также удовлетворяет волновому уравнению колебаний (5), но при однородных (нулевых) граничных условиях:

$$-m \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial t^2} - b_3 \frac{\partial w(0, t)}{\partial t} - c_3 w(0, t) + F \cdot E \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} + F \cdot \eta \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x \partial t} + \mu \cdot E \cdot F \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0; \quad (25)$$

$$w(H, t) = 0. \quad (26)$$

Начальные условия для функции $w(x, t)$ можно определить из следующих выражений:

$$v(x, 0) + w(x, 0) = 0, \quad \partial v(x, 0)/\partial t + \partial w(x, 0)/\partial t = V_n, \quad (27)$$

Определяя $v(x, 0)$ и $\partial v(x, 0)/\partial t$ из выражения (18) для функции $w(x, t)$, получим:

$$w(x, 0) = -A_1 \cdot \frac{sh[(\alpha + ik)(H - x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \cdot \sin(\psi - \varphi); \quad (28)$$

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = V_n - A_1 \omega \frac{sh[(\alpha + ik)(H - x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \cdot \cos(\psi - \varphi). \quad (29)$$

Используя метод Фурье [8, 9], будем отыскивать частные решения уравнения (5), удовлетворяющие граничным условиям (25) и (26). Для этого функцию $w(x, t)$ представим в виде:

$$w(x, t) = W(x) \cdot T(t), \quad (30)$$

где каждое из искоемых решений представляется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , а другая – только от t .

Подставим выражение (30) в уравнение (5) и, используя метод разделения переменных, получим:

$$(1 + \mu) \cdot a^2 \cdot \frac{W''(x)}{W(x)} = \frac{T''(t)}{T(t) + \frac{\eta}{E} \cdot T'(t)}, \quad (31)$$

$$\text{где } a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Чтобы функция $w(x,t)$ была решением уравнения (5) равенство (31) должно соблюдаться при всех значениях x и t . Это будет справедливо только в том случае, когда обе части равенства (31) не зависят ни от x , ни от t , то есть отношения $(1 + \mu) \cdot a_0^2 \cdot \frac{W''(x)}{W(x)}$ и $\frac{T''(t)}{T(t) + \frac{\eta}{E} \cdot T'(t)}$ являются величинами постоянными и равными $-p_c^2$ [9]:

$$(1 + \mu) \cdot a^2 \cdot \frac{W''(x)}{W(x)} = \frac{T''(t)}{T(t) + \frac{\eta}{E} \cdot T'(t)} = -p_c^2. \quad (32)$$

В этом случае функции $W(x)$ и $T(t)$ определяются из уравнений:

$$W''(x) + \frac{p_c^2}{a^2 \cdot (1 + \mu)} \cdot W(x) = 0; \quad (33)$$

$$T''(t) + \left(\frac{\eta \cdot p_c^2}{E} \right) T'(t) + p_c^2 T(t) = 0. \quad (34)$$

Решения уравнений (33) и (34) представим в следующем виде:

$$W(x) = C_1 \cos\left(\frac{p_c}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}}\right) \cdot x + C_2 \sin\left(\frac{p_c}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}}\right) \cdot x; \quad (35)$$

$$T(t) = e^{-\delta \cdot t} [M \cos(pt) + N \sin(pt)], \quad (36)$$

где C_1, C_2, M, N – постоянные интегрирования;

$$p = \sqrt{p_c^2 - \delta^2}; \quad \delta = \eta \cdot p_c^2 / 2 \cdot E.$$

В этом случае функция $w(x,t)$ будет иметь следующий вид:

$$w(x,t) = C_1 \cos\left(\frac{p_c}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}}\right) \cdot x + C_2 \sin\left(\frac{p_c}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}}\right) \cdot x \times e^{-\delta \cdot t} [M \cos(pt) + N \sin(pt)]. \quad (37)$$

Используя зависимости (18) и (37), начальные условия (28) и (29) найдем функцию $w(x,t)$ в следующем виде:

$$w(x,t) = e^{-\delta \cdot t} \left\{ (-A_1 \cdot \frac{sh[(\alpha + ik)(H - x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \cdot \sin(\psi - \varphi)) \cdot \cos(pt) + \right. \\ \left. + \left(\frac{V_n}{p} - A_1 \frac{\omega[\cos(\psi - \varphi) + \delta \sin(\psi - \varphi)]}{p} \right) \times \frac{sh[(\alpha + ik)(H - x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \cdot \sin(pt) \right\}. \quad (38)$$

Тогда окончательное решение уравнения (5), удовлетворяющее граничным (6), (7) и начальным (8) условиям будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & A_1 \cdot \frac{sh[(\alpha + ik)(H - x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \cdot \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \\
& + e^{-\delta \cdot t} \left\{ (-A_1 \cdot \frac{sh[(\alpha + ik)(H - x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \cdot \sin(\psi - \varphi)) \cdot \cos(pt) + \left(\frac{V_n}{p} - A_1 \frac{\omega [\cos(\psi - \varphi) + \delta \sin(\psi - \varphi)]}{p} \right) \times \right. \\
& \left. \times \frac{sh[(\alpha + ik)(H - x)]}{sh[(\alpha + ik)H]} \cdot \sin(pt) \right\}. \quad (39)
\end{aligned}$$

Выражение (39) при $x > 0$ описывает движение уплотняемой порошковой смеси в направлении координаты x за время t . При $x=0$ оно описывает движение верхнего слоя порошковой смеси при ее взаимодействии с пуансоном в вертикальном направлении:

$$\begin{aligned}
u(0, t) = & A_1 \cdot \sin(\omega t + \psi - \varphi) + e^{-\delta \cdot t} \cdot (-A_1 \cdot \sin(\psi - \varphi)) \cdot \cos(pt) + \\
& + (1/p) \cdot (V_n - A_1(\omega \cdot \cos(\psi - \varphi) + \delta \cdot \sin(\psi - \varphi))) \cdot \sin(pt). \quad (40)
\end{aligned}$$

Выражение (40) показывает, что через время t_{12} от начала движения произойдет максимальное деформирование поверхности порошковой смеси, при этом пуансон переместится на величину A , а его скорость станет равной нулю:

$$u(0, t_{12}) = A; \quad \partial u(0, t_{12}) / \partial t = 0. \quad (41)$$

После этого вибрирующий пуансон отрывается от поверхности порошковой смеси и начинается двигаться вверх. Движение вибрирующего пуансона в отрыве от уплотняемой порошковой смеси (второй этап) за время t_2 может быть описано уравнением:

$$m \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + b_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} + c_3 u_3 - Q \sin[\omega(t + t_1) + \psi] = 0. \quad (42)$$

Решение уравнения (42) можно представить в виде:

$$u_2(t) = e^{-\beta_2 t} [B_1 \cos(qt) + B_2 \sin(qt)] + A_2 \cdot \sin(\omega(t + t_1) + \psi - \varphi_2), \quad (43)$$

где A_2 – амплитуда вынужденных колебаний пуансона при его движении в отрыве от уплотняемой порошковой смеси;

q – частота собственных колебаний пуансона;

B_1, B_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий при $t=0$:

$$u_2(0, t_1) = 0; \quad \partial u_2(0, t_1) / \partial t = V_1; \quad (44)$$

$$A_2 = \frac{Q}{m \sqrt{(q_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_2^2 \omega^2}}; \quad (45)$$

$$\beta_2 = \frac{b_2}{2m}; \quad q_0^2 = \frac{c_3}{m}; \quad q = \sqrt{q_0^2 - \beta_2^2}; \quad \varphi_2 = \arctg \left(\frac{2\beta_2 \omega}{q_0^2 + \omega^2} \right). \quad (46)$$

На основании уравнений (43) и (44) решение уравнения будет представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_2(t) = & e^{-\beta_2 t} [-A_2 \sin(\omega t + \psi - \varphi_2)] \cos(qt) + \\
& + \left[\frac{V_1}{q} - \frac{A_2}{q} (\beta_2 \sin(\omega t_1 + \psi - \varphi_2) + \omega \cos(\omega t_1 + \psi - \varphi_2)) \right] \times \\
& \times \sin(qt) + A_2 \cdot \sin(\omega(t + t_1) + \psi - \varphi_3). \quad (47)
\end{aligned}$$

Движение пуансона в отрыве от порошковой смеси будет происходить до следующего удара, который произойдет при подходе пуансона к положению равновесия в момент времени $t_2 = (2 \cdot \pi / \omega) - t_1$. Значит, при $t_2 = t$; $u_2(t_2) = 0$; $\partial u(t_2) / \partial t = V_n$.

Анализ выражения (47) показывает, что слагаемое в квадратных скобках, стоящее под знаком экспоненты, представляет собой малую величину и быстро затухает: при $t_2 = t$ принимает значение близкое к нулю. Это значит, что к моменту удара свободные колебания практически затухнут, а виброплита вместе с пуансоном будет совершать только вынужденные колебания. Из этого следует, что:

$$\psi \approx \varphi_2; \quad V_n = A_2 \cdot \omega. \quad (48)$$

ВЫВОДЫ

Таким образом, в результате проведенных исследований получены теоретические выражения, которые позволяют описать процесс взаимодействия вибрирующего пуансона вибрационного пресса с порошковой смесью, определить закон движения вибрирующего пуансона при его движении в контакте и в отрыве от порошковой смеси, физико-механические характеристики и напряженно-деформированное состояние уплотняемой порошковой смеси.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдман П. С. Феноменологическая модель напряженного состояния слоя материала при сжатии / П. С. Гольдман, Л. В. Яхкинд // *Дробильно-размольное оборудование и технология дезинтеграции* : сб. науч. тр. – Ленинград, 1989. – С. 78–85. – (Серия «Механообработка»).
2. Рудь В. Д. Фізико-механічні засади складних схем обробки тиском та вібраційних процесів в технологіях формування порошкових виробів : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук : спец. 05.16.06 «Порошкова металургія та композиційні матеріали» / В. Д. Рудь. – Київ, 2005. – 21 с.
3. Гончаревич И. Ф. Реологические методы описания взаимодействия вибромеханизмов с рабочей средой / И. Ф. Гончаревич // *Вибротехника* : сб. науч. тр. – 1973. – № 3(20). – С. 107–114.
4. Овчинников П. Ф. Виброреология / П. Ф. Овчинников. – К. : Наукова думка, 1983. – 272 с.
5. Назаренко І. І. Прикладні задачі теорії вібраційних систем : навч. посібник / І. І. Назаренко – Київ : ІСДО, 1995. – 256 с.
6. Савелов Д. В. Разработка вибрационного пресса для формования изделий из металлических порошков / Д. В. Савелов, В. В. Драгобецкий // *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»* : зб. наук. пр. : Тематичний випуск : Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2010. – № 43. – С. 3–7.
7. Савелов Д. В. Теоретические основы вибрационного формования изделий из металлических порошков / Д. В. Савелов, В. В. Драгобецкий // *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»* : зб. наук. пр. : Тематичний випуск : Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2011. – № 45. – С. 91–98.
8. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер ; пер. с англ. Л. Г. Григолюка. – Москва : Машиностроение, 1985. – 472 с.
9. Араманович И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – Москва : Машиностроение, 1969. – 288 с.

Савелов Д. В. – канд. техн. наук, доц. КрНУ.

КрНУ – Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, г. Кременчуг.

E-mail: savelov@vazit-net.com

Статья поступила в редакцию 14.03.2012 г.